JOURNAL OF ALGEBRA 125, 181–196 (1989)

Le théorème de Tate–Poitou pour les corps de fonctions des courbes définies sur les corps locaux de dimension N

JEAN-CLAUDE DOUAI*

Ecole Normale Supérieure de Bizerte, Tunisia

Communicated by Richard G. Swan

Received December 19, 1987

Soit k un corps local de dimension N au sens de Parshin–Kato, c'est-à-dire que k est l'aboutissement d'une chaîne de corps $k_0, k_1, ..., k_N = k$ satisfaisant les conditions

(i) k_0 est un corps fini,

(ii) pour chaque $i = 1, ..., N$, k_i est un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel k_{i-1}.

Soient X une courbe projective, géométriquement irréductible, lisse, définie sur k, q un entier premier à la caractéristique p du corps k_0. Nous supposerons que k_0 contient les racines q-ièmes de l'unité (hypothèse mineure). Par la combinaison de la dualité de Poincaré pour $\bar{X} = X \times_k k^{\mathrm{sep}}$ et la dualité de Tate étendue par Parshin–Kato pour la cohomologie de k, nous établissons d'abord dans le cas $N = 0, 1, 2, 3$ une dualité étale de groupes finis entre $H^{N+2}(X, \mu_q)$ et $H^1(X, \mu_q)$ (i.e. $H^{N+2}(X, \mu_q)$ peut s'interpréter comme le groupe $\pi_1^{ab}(X)/q \cdot \pi_1^{ab}(X)$). Dans le cas particulier où $N = 0$, nous retrouvons la dualité parfaite bien connue entre $H^2(X, \mu_q)$ et $H^1(X, \mu_q)$ et qui constitue d'ailleurs l'essentiel du théorème de dualité étale pour les courbes X définies sur les corps finis. Dans le case $N = 1$, la dualité entre $H^3(X, \mu_q)$ et $H^1(X, \mu_q)$ a déjà été mentionnée par S. Saito [12, p. 72] et par S. Bloch [1, p. 245] en haut dans le cas p-adique. Si N est quelconque $\geqslant 4$, il est probable qu'elle reste vraie (il en sera ainsi dès que l'on aura établi la conjecture 1 de [5, section 1, p. 608]), mais nous devons imposer une condition supplémentaire de bonnes réductions sous les réductions successives de k_i mod π_i, i variant entre 1 et N, π_i désignant une uniformisante de k_i. Nous obtenons ensuite à partir de la dualité précédente un théorème du type Tate–Poitou pour le corps K des fonctions de la courbe X qui

* Current address: Université P. et M. Curie, Mathématiques, Tour 45–46, 5[ième] étage, 75230 Paris Cedex 05, France.

0021-8693/89 $3.00

constitue le théorème central (théorème 3.1) et, de là, l'existence, dans le cas $N = 1$, d'une suite exacte longue (théorème 4.1) généralisant celle de Tate pour le cas d'un corps de nombres. Ce travail s'inscrit dans le fil d'un papier antérieur [2] dans lequel nous avons établi la validité du théorème de Tate–Poitou pour les corps de fonctions des courbes définies sur les coprs locaux du type $C((t))$ avec C algébriquement clos de caractéristique 0.

Soient N en entier $\geqslant 0$, $k_0, \ldots, k_N$ une chaîne de corps satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de l'introduction et faisant de k_N un corps local de dimension N au sens de Parshin Kato [4, 5, 11]. Nous dénoterons k_N par k, k_{N-1} par F. Le théorème III de [5, p. 605] nous dit que k est de dimension cohomologique $(N+1)$. Dans toute la suite, q désignera un entier > 0 premier à la caractéristique p de k_0 et nous supposerons pour simplifier que k_0 contient les racines q-ièmes de l'unité.

I. Rappels et calculs galoisiens

1.1. Soit k_{nr} l'extension maximale non ramifiée de k. Identifications F_s avec le corps résiduel de k_{nr}. Nous avons

$$H^i(k_{nr}, \mu_q) \simeq \begin{cases} \mu_q & \text{si} \quad i = 0 \\ \mu_q & \text{si} \quad i = 1. \end{cases}$$

La suite spectrale $H^*(F, H^{**}(k_{nr}, \mu_q)) \Rightarrow H^*(k, \mu_q)$ (cf. [4, p. 347]) fournit alors la suite exacte (Godement [3, Chap. IV, théorème 4.6.2])

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow E_2^{i,0} \longrightarrow H^i(k, \mu_q) \longrightarrow E_2^{i-1,1} \longrightarrow E_2^{i+1,0} \\ \longrightarrow H^{i+1}(k, \mu_q) \longrightarrow \cdots, \qquad i \geqslant 1, \end{aligned}$$

qui s'écrit

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^i(F, \mu_q) \xrightarrow{i_k^F} H^i(k, \mu_q) \longrightarrow H^{i-1}(F, \mu_q) \\ \longrightarrow H^{i+1}(F, \mu_q) \longrightarrow \ldots, \qquad i \geqslant 1. \end{aligned}$$

Les suites courtes $H^i(F, \mu_q) \xrightarrow{i_k^F} H^i(k, \mu_q) \xrightarrow{\delta} H^{i-1}(F, \mu_q)$ pour $i \geqslant 1$ se scindent à l'aide des applications inverse à δ. Nous avons

$$\begin{aligned} H^{i-1}(F, \mu_q) &\longrightarrow H^i(k, \mu_q) \\ w &\longrightarrow (-1)^{i-1}\{i_k^F(w), \pi\} \end{aligned}$$

où $\pi = \pi_N$ est une uniformisante de k et $\{i_k^F(w), \pi\}$ dénote le cup produit $i_k^F(w) \cup \bar{\pi}$, $\bar{\pi}$ désignant l'image de π dans $k^*/(k^*)^q \simeq H^1(k, \mu_q)$ par l'application canonique $k^* \to k^*/(k^*)^q$. Le signe $(-1)^{i-1}$ trouve sa justification dans le lemme 1 de [5, section 1-2]. On en déduit, pour tout $i \geqslant 1$, une suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow H^i(F, \mu_q) \xrightarrow{i_k^F} H^i(k, \mu_q) \longrightarrow H^{i-1}(F, \mu_q) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

(cf. le lemme 2 de [5, section 3.2] ou (5), p. 216 de l'introduction de [6] ou le théorème 3-(1) de [6, p. 219]). Dans le cas particulier où $i = N+1$, $H^{N+1}(F, \mu_q) = 0$ puisque $F = k_{N-1}$ est de dimension cohomologique N et la suite exacte (1) donne $H^{N+1}(k, \mu_q) \simeq H^N(F, \mu_q)$ $(\simeq H^{N-1}(k_{N-2}, \mu_q)$ $\simeq \cdots \simeq H^1(k_0, \mu_q) \simeq Z/qZ)$.

1.2. Proposition. *L'accouplement $H^i(k, \mu_q) \times H^{N-i+1}(k, \mu_q) \to H^{N+1}(k, \mu_q)$ $\simeq Z/qZ$, $0 \leqslant i \leqslant N+1$, met les groupes finis $H^i(k, \mu_q)$ et $H^{N-i+1}(k, \mu_q)$ en dualité parfaite.*

(cf. le théorème 4 de Parshin [11]; comme k contient les racines q-ièmes de l'unité, $\mu^{\otimes i} \simeq \mu_q$).

Remarquons d'abord que la suite exacte scindée (1) permet d'établir par récurrence la finitude des groups $H^i(k, \mu_q)$ pour $1 \leqslant i \leqslant N+1$. On établit alors la proposition par récurrence sur la dimension cohomologique N de F. Par (1), on a

$$H^i(k, \mu_q) = H^i(F, \mu_q) \oplus H^{i-1}(F, \mu_q)$$
$$H^{N-i+1}(k, \mu_q) = H^{N-i+1}(F, \mu_q) \oplus H^{N-i}(F, \mu_q), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Par hypothèse de récurrence, F est de dimension cohomologique N et pour $1 \leqslant i \leqslant N$, $H^{N-i}(F, \mu_q)$ (resp. $H^{N-(i-1)}(F, \mu_q)$) est le dual de $H^i(F, \mu_q)$ (resp. $H^{i-1}(F, \mu_q)$), d'où l'on déduit la dualité entre $H^i(k, \mu_q)$ et $H^{N-i+1}(k, \mu_q)$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$ dans la proposition 1.2. Or pour $N = 1$ (K corps p-adique ou corps de séries formelles en une variable sur un corps fini), la dualité de la proposition 1.2 est bien connue. Elle est donc vraie pour N quelconque et $1 \leqslant i \leqslant N$. Comme pour $i = 0$ et $i = N+1$, la dualité est évidente, la proposition est ainsi démontrée.

1.3. Corollaire. *Soient X une courbe projective, non singulière, géomètriquement connexe définie sur k. Le terme $E_2^{N,2}$ de la suite spectrale $H^*(k, H^*(\bar{X}, \mu_q)) \Rightarrow H^*(X, \mu_q)$ est dual du group $k^*/(k^*)^q$.*

En effet, $E_2^{N,2} = H^N(k, H^2(\bar{X}, \mu_q))$ est isomorphe à $H^N(K, \mu_q)$, donc au dual de $k^*/(k^*)^q = H^1(k, \mu_q)$ par la proposition 1.2.

1.4. Proposition. *Le term $E_2^{N+1,1}$ de la suite spectrale du corollaire précédent est dual du group $\hat{J}(k)_q$. Autrement dit,*

$$H^{N+1}(k, H^1(\bar{X}, \mu_q)) = H^{N+1}(k, J_q) \simeq \hat{J}(k)_q.$$

J désigne la Jacobienne de X, $\hat{J}$ sa duale.

Pour tout $\mathrm{Gal}(k_s/k)$-module fini A, un dévissage du type de celui de la proposition 14 de [14, p. II-21] montre que, pour tout $i \geqslant 0$, $H^i(k, A)$ est fini. Puisque k est de dimension cohomologique $(N+1)$, la proposition 17, p. I-27 de [14] montre alors que $H^{N+1}(k, J_q) \simeq \hat{J}(k)_q$.

1.5. Nous pouvons résumer les résultats obtenus pour $p+q=N+2$ comme suit:

(1) $E_2^{N+2,0} = H^{N+2}(k, H^0(\bar{X}, \mu_q)) = H^{N+2}(k, \mu_q) = 0$ $(\mathrm{cd}\,(k) = N+1)$

(2) $E^{N+1,1} \simeq \hat{J}(k)_q$,

(3) $E_2^{N,2} \simeq \widehat{k^*/(k^*)^q}$,

(4) $E_2^{N+2-j,j} = 0$ pour $N+2 \geqslant j \geqslant 3$.

1.6. Pour $p+q=N+3$, le seul terme terme non nul de la suite spectrale est le terme $E_2^{N+1,2} = H^{N+1}(k, H^2(\bar{X}, \mu_q)) \simeq H^{N+1}(k, \mu_q) \simeq \mu_q$.

II. Un théorème de dualité

2.1. Théorème. *Soient $k = k_N$ un corps local du type considéré par Kato, q un entier premier à la caractéristique p de k_0, X une courbe projective, non singulière, géométriquement connexe, définie sur k et admettant un point k-rationnel. Supposons l'une des conditions suivantes réalisée*:

(i) *ou* $N = 1, 2, 3$,

(ii) *ou N est quelconque mais sous les réductions successives de $k_i \bmod \pi_i$, lorsque i décroit de N à 1, π_i étant une uniformisante de k_i, la courbe X admet à chaque étape bonne réduction* (pour la notion de bonne réduction d'une courbe définie sur un corps local, on renvoie à la proposition 2.4 de [1, section 2]).

Nous avons alors un accouplement

$$\begin{array}{ccc} H^{N+2}(X, \mu_q) \times H^1(X, \mu_q) & \longrightarrow & H^{N+3}(X, \mu_q) \\ & & \wr\| \\ & & H^{N+1}(k, \mu_q) \\ & & \wr\| \\ & & \mu_q \end{array}$$

qui met en dualité parfaite les deux groupes finis $H^{N+2}(X, \mu_q)$ et $H^1(X, \mu_q)$.

L'hypothèse de bonne réduction dans (ii) généralise l'hypothèse de bonne réduction faite dans la proposition 2.4 et le théorème 2.9 de [1] pour le cas $N=1$ et k un corps p-adique.

Dans ce cas $N=1$, k p-adique, l'accouplement précédent a déjà été considéré par S. Bloch dans la démonstration du lemme 2.18 (diagramme 2.19) de [1] mais pour $q=p$ et par Saito dans le n° 5, chap. II (isomorphisme (4.4)) de [12].

Le théorème est vrai pour $N=0$: c'est le théorème de dualité bien connu pour les courbes définies sur les corps dinis (cf. par ex. Milne [9, chap. V, corollaire 2.3]).

Démonstration. Nous montrerons que $H^{N+2}(X, \mu_q)$ est une extension du groupe $E_2^{N,2}$ par le groupe $E_2^{N+1,1}$ où $E_2^{p,q}=H^p(k, H^q(\bar{X}, \mu_q))$. Par les égalités 1.5 (2) et (3), la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_2^{N+1,1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{N+2}(X, \mu_q) \arrow[r] & H^N(k, H^2(\bar{X}, \mu_q)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ & H^{N+1}(k, J_q) & & H^N(k, \mu_q) & \end{tikzcd} \tag{2}$$

sera alors duale de la suite exacte

$$0 \longleftarrow \hat{J}(k)_q \longleftarrow H^1(X, \mu_q) \longleftarrow \frac{k^*}{(k^*)^q} \longleftarrow 0 \tag{3}$$

(pour cette dernière suite exacte déduite de $1 \to \mu_q \to G_m \xrightarrow{q} G_m \to 1$ cf. par ex. Milne [9, chap. III, proposition 4.11]), la dualité entre $E_2^{N+1,1}$ et $J(k)_q$ se réduisant à la dualité entre $\hat{J}(k)_q$ et $J(k)_q$, i.e. à l'autodualité de $J(k)_q$.

Remarquons que $E_2^{N,2}=E_3^{N,2}$ car $E_3^{N,2}$ est l'homologie en $E_2^{N,2}$ du complexe $E_2^{N-2,3} \xrightarrow{d_2^{N-2,3}} E_2^{N,2} \xrightarrow{d_2^{N,2}} E_2^{N+2,1}$. Or $E_2^{N-2,3}=0$ puisque $H^i(\bar{X}, \mu_q)=0$ pour $i \geqslant 3$ et $E_2^{N+2,1}=0$ puisque $\mathrm{cd}(k)=N+1$. Les mêmes raisons montrent plus généralement que $E_2^{N,2}=E_3^{N,2}=E_4^{N,2}=\cdots=E_\infty^{N,2}$. En raison des égalités 1.5, la filtration de $H^{N+2}(X, \mu_q)$ déduite de la suite spectrale $H^*(k, H^*(\bar{X}, \mu_q)) \Rightarrow H^*(X, \mu_q)$ est à deux crans: $H^{N+2}(X, \mu_q)=E_N \supset E_{N+1} \supset E_{N+2}=0$ et l'application surjective $H^{N+2}(X, \mu_q) \to E_\infty^{N,2}=E_2^{N,2}$ a précisément pour noyau $E_{N+1}=E_\infty^{N+1,1}$. Nous sommes donc ramenés à calculer $E_\infty^{N+1,1}$. Nous avons

$$E_3^{N+1,1}=E_4^{N+1,1}=\cdots=E_\infty^{N+1,1}$$

car le terme $E_{r+1}^{N+1,1}$ est l'homologie en $E_r^{N+1,1}$ du complexe

$$E_r^{N+1-r,r} \longrightarrow E_r^{N+1,1} \longrightarrow 0$$

et $E_r^{N+1-r,r}$ est nul pour $r \geqslant 3$. Comme $E_3^{N+1,1}$ est l'homologie en $E_2^{N+1,1}$ du complexe

$$E_2^{N-1,2} \xrightarrow{d_2^{N-1,2}} E_2^{N+1,1} \longrightarrow 0,$$

nous obtenons:

2.2. LEMME. *Le noyau $E_\infty^{N+1,1}$ de l'application canonique surjective $H^{N+2}(X, \mu_q) \to E_\infty^{N,2} = E_2^{N,2} \simeq \widehat{k^*/(k^*)^q}$ s'identifie au quotient de $H^{N+1}(k, J_q)$ par l'image de $d_2^{N-1,2}$. En d'autres termes, la suite*

$$0 \longrightarrow H^{N+1}(k, J_q)/\mathrm{im}\, d_2^{N-1,2} \longrightarrow H^{N+2}(X, \mu_q) \longrightarrow \widehat{k^*/(k^*)^q} \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

est exacte.

Nous montrons maintenant que pour $N = 1, 2, 3$, Im $d_2^{N-1,2} = 0$.

(1) $N = 1$ (par ex. $k_1 = k$ est un corps p-adique): dans le cas où X admet un point k-rationnel, la démonstration du fait que $d_2^{0,2} = 0$ est contenue dans [1, p. 237] en haut dans l'établissement de l'inclusion $E_\infty^{2,1} \subsetneq E_2^{2,1}$.

(2) $N = 2$:

$$\begin{array}{ccc} d_2^{1,2}: H^1(k, \mu_q) & \longrightarrow & H^3(k, J_q) \\ \wr\| & & \wr\| \\ k^*/(k^*)^q & & \hat{J}(k)_q \end{array}$$

se factorise comme suit

$$k^*/(k^*)^q \longrightarrow H^1(X, \mu_q) \longrightarrow \hat{J}(k)_q.$$

$d_2^{1,2}$ est donc nulle en vertu de l'exactitude de (3).

(3) $N = 3$:

$$\begin{array}{ccc} d_2^{2,2}: H^2(k, \mu_q) & \longrightarrow & H^4(k, J_q). \\ & & \wr\| \\ & & \hat{J}(k)_q \end{array}$$

Le cup produit

$$\begin{array}{ccc} k^*/(k^*)^q \otimes k^*/(k^*)^q & \longrightarrow & H^2(k, \mu_q \otimes \mu_q) \\ & & \wr\| \\ & & H^2(k, \mu_q) \end{array}$$

est surjectif (ceci peut être vu comme une conséquence du théorème bien connu de Suslin–Merkurev selon lequel l'application $K_2(k)/K_2(k)^q \to H^2(k, \mu_q \otimes \mu_q)$ est bijective). $d_2^{2,2}$ se relève donc en une application $\tilde{d}_2^{2,2}$ de $k^*/(k^*)^q \otimes k^*/(k^*)^q$ dans $\hat{J}(k)_q$. D'après la suite exacte (3), les deux applications partielles de $k^*/((k^*)^q$ dans $\hat{J}(k)$ induites par $\tilde{d}_2^{2,2}$ sont nulles et il en est de même de leur composée $\tilde{d}_2^{2,2}$. Le théorème est ainsi établi quand $N = 1, 2, 3$.

Dans le cas général, pour N quelconque, j'ignore si l'application cup produit $k^*/(k^*)^q \times \overset{(N-1)\text{ fois}}{\cdots} \times k^*/(k^*)^q \to H^{N-1}(k, \mu_q)$ est surjective (il en sera ainsi dès que l'on aura établi la conjecture 1 de [5, chap. II, p. 608]. A défaut de cette surjectivité, nous devrons procéder différemment et faire intervenir l'hypothèse (ii) du théorème.

2.3. Lemme. *Sous l'hypothèse* (ii), *il existe une chaîne d'isomorphismes, pour* $1 \leqslant i \leqslant N-1$,

$$H^i(k_{i-1}, J_q) \simeq H^{i+1}(k_i, J_q) \cdots \simeq H^N(F, J_q) \simeq H^{N+1}(k, J_q).$$

Chacun de ces isomorphismes étant obtenu au signe près en prenant le cup produit par l'uniformisante π_i *de* k_i.

Rappelons que puisque k_0 a été supposé contenir les racines q-ièmes de l'unité, $J_q(1) \simeq J_q$.

Soit k_{nr} l'extension maximale non ramifiée de k. $H^1(k_{nr}, J_q)$ est isomorphe à $J(k_{nr})_q \simeq \hat{J}(k_{nr})_q$, la démonstration étant essentiellement celle de Ogg, [10, p. 191, lignes 19 et suivantes]. On peut supposer que tous les points d'ordre q de $J(\bar{k})$ sont dans $J(k)$ et même dans $J(k_0)$ et vu la condition (ii), on aura

$$J(\bar{k})_q = J(k)_q \simeq J(F)_q = J(\bar{F})_q = \cdots = J(k_0)_q.$$

La suite spectrale $H^*(F_s/F,\ H^*(k_{nr}, J_q)) \Rightarrow H^*(k, J_q)$ donne alors de la même manière que dans 1.1, pour $1 \leqslant i \leqslant N+1$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^i(F, J_q) \xrightarrow{i_k^F} H^i(k, J_q) \xrightarrow{\delta} H^{i-1}(F, J_q) \longrightarrow 0.$$

Cette dernière est scindée par

$$\begin{aligned} H^{i-1}(F, J_q) &\longrightarrow H^i(k, J_q) \\ w &\longrightarrow (-1)^{i-1}\{i_k^F(w), \pi\}. \end{aligned}$$

Faisant $i = N+1$, puisque $\mathrm{cd}(F) = N$, on obtient le dernier isomorphisme dans la chaîne du lemme, les autres s'obtenant de manière analogue.

Dans le cas $N=1$, l'isomorphisme $H^N(F, J_q) = H^1(k_0, J_q) \simeq H^2(k, J_q)$ est mentionné dans la preuve du lemme 2.12 de [1].

Les applications inverses aux isomorphismes du lemme 2.3 jouent le rôle de bord (ou applications "résidues" cf. section 1.4, chap. II de [5]).

Passons à la démonstration proprement dite du théorème pour le cas où l'hypothèse (ii) est satisfaite. Procédons par récurrence; posons $X_N = X$, $X_{N-1} = X(\mathrm{mod}\ \pi_N)$, ..., $X_i = X_{i+1}(\mathrm{mod}\ \pi_{i+1})$, ..., $X_0 = X_1(\mathrm{mod}\ \pi_1)$ où π_i désigne l'uniformisante de k_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. Les courbes X_i sont des courbes projectives, non singulières, définies sur les corps k_i. Supposons qu'il existe pour $1 \leqslant i \leqslant N$ une dualité parfaite $H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \times H^1(X_{i-1}, \mu_q) \to H^{i+2}(X_{i-1}, \mu_q)$ entre les groupes finis $H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q)$ et $H^1(X_{i-1}, \mu_q)$ et montrons qu'elle induit une dualité du même type

$$H^{i+2}(X_i, \mu_q) \times H^1(X_i, \mu_q) \to H^{i+3}(X_i, \mu_q).$$

Considérons le diagramme de la Figure 1 dans lequel toutes les colonnes sont exactes. La dualité parfaite entre $H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q)$ et $H^1(X_{i-1}, \mu_q)$ induit une dualité parfaite entre les deux morphismes

$$\begin{gathered} H^i(k_{i-1}, J_q) \longrightarrow H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \\ \hat{J}(k_{i-1}) \longleftarrow H^1(X_{i-1}, \mu_q). \end{gathered}$$

Comme le deuxième est surjectif, le premier est injectif, d'où la présence du 0 en bas à gauche de la première colonne.

L'isomorphisme $H^i(k_{i-1}, J_q) \times \hat{J}(k_{i-1})_q \simeq H^{i+1}(k_i, J_q) \times \hat{J}(k_i)_q$ vient du lemme 2.3 et de l'hypothèse (ii) de bonne réduction mod (π_i). L'exactitude de la troisième colonne de la Figure 1 résulte du lemme 2.2 appliqué au cas $N=i$. Dans la Figure 1, le groupe $k_i^*/(k_i^*)^q$ (resp. $\widehat{k_i^*/(k_i^*)^q}$) se scinde sous

$$\begin{tikzcd}
0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\widehat{k^*_{i-1}/(k^*_{i-1})^q} \arrow[u] & \times & k^*_{i-1}/(k^*_{i-1})^q \arrow[d] & \widehat{k^*_i/(k^*_i)^q} \arrow[u] & \times & k^*_i/(k^*_i)^q \arrow[d] \\
H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \arrow[u] & \times & H^1(X_{i-1}, \mu_q) \arrow[d] & H^{i+2}(X_i, \mu_q) \arrow[u, dashed] & \times & H^1(X_i, \mu_q) \arrow[d] \\
H^i(k_{i-1}, J_q) \arrow[u] & \times & \hat{J}(k_{i-1})_q \arrow[d] \arrow[r, "\sim"] & H^{i+1}(k_i, J_q) \arrow[u] & \times & \hat{J}(k_i)_q \arrow[d] \\
0 \arrow[u] & & 0 & & & 0
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \\
\widehat{k_{i-1}^*/(k_{i-1}^*)^q} \arrow[u] \arrow[r, hook] & \widehat{k_i^*/(k_i^*)^q} \arrow[u] \\
H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \arrow[u] \arrow[r, hook, "j"] & H^{i+2}(X_i, \mu_q) \arrow[u] \\
H^i(k_{i-1}, J_q) \arrow[u, dotted] \arrow[r, "\sim"] & H^{i+1}(k_i, J_q) \arrow[u] \\
0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2

la forme $k_{i-1}^*/(k_{i-1}^*)^q \times Z/qZ$ (resp. $\widehat{k_{i-1}^*/(k_{i-1}^*)^q} \times \mu_q$). On en déduit l'exstence d'une injection j de $H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q)$ dans $H^{i+2}(X_i, \mu_q)$ (resp. d'une injection $\tilde{j}$ de $H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \times H^1(X_{i-1}, \mu_q)$ dans $H^{i+2}(X_i, \mu_q) \times H^1(X_i, \mu_q)$, $\tilde{j}$ induisant j sur la première composante et sur la deuxième composante l'injection $H^1(X_{i-1}, \mu_q) \hookrightarrow H^1(X_i, \mu_q)$ induite par $k_{i-1}^*/(k_{i-1}^*)^q \hookrightarrow k_i^*/(k_i^*)^q$ et l'isomorphisme $\hat{J}(k_{i-1})_q \simeq J(k_i)_q$). j rend commutatif tous les diagrammes de la Figure 2 (resp. $\tilde{j}$ rend commutatif tous les diagrammes de la Figure 3).

Il en résulte l'injectivité du morphisme $H^{i+1}(k_i, J_q) \to H^{i+2}(X_i, \mu_q)$ et la proposition suivante:

2.4. PROPOSITION. *Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, la suite $0 \to H^{i+1}(k_i, J_q) \to H^{i+2}(X_i, \mu_q) \to k_i^*/(k_i^*)^q \to 0$ est exacte et en dualité parfaite avec la*

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \arrow[d] & 0 & 0 \arrow[d] \\
\widehat{k_{i-1}^*/(k_{i-1}^*)^q} \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & k_{i-1}^*/(k_{i-1}^*)^q \arrow[d] & \widehat{k_i^*/(k_i^*)^q} \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & k_i^*/(k_i^*)^q \arrow[d, dotted] \\
H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & H^1(X_{i-1}, \mu_q) \arrow[d] \arrow[r, hook, "\tilde{j}"] & H^{i+2}(X_i, \mu_q) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & H^1(X_i, \mu_q) \arrow[d] \\
H^i(k_{i-1}, J_q) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & \hat{J}(k_{i-1})_q \arrow[d] \arrow[r, "\sim"] & H^{i+1}(k_i, J_q) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & \hat{J}(k_i)_q \arrow[d] \\
0 \arrow[u] & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3

suite exacte $0 \to k_i^*/(k_i^*)^q \to H^1(X_i, \mu_q) \to \hat{J}(k_i)_q \to 0$. *La dualité entre* $H^{i+2}(X_i, \mu_q)$ *et* $H^1(X_i, \mu_q)$ *est compatible avec la dualité entre* $H^{i-1}(X_{i-1}, \mu_q)$ *et* $H^1(X_{i-1}, \mu_q)$.

Fin de la démonstation du théorème 2.1. Le théorème est vrai pour $N=1$ (2, 3) (il est même vrai pour $N=0$ comme on l'a déjà remarqué à la suite de l'énoncé du théorème 2.1). Comme la récurrence est complète, il est vrai pour $i=N$.

2.5. COROLLAIRE À LA PROPOSITION 2.4. Im $d_2^{N-1,2}=0$.

En effet, pour $i=N$, la suite exacte de la proposition 2.4 montre que le noyau de l'application $H^{N+2}(X, \mu_q) \to E_\infty^{N,2} = E_2^{N,2}$ s'identifie à $H^{N+1}(k, J_q)$, d'où $E_\infty^{N+1,1} \simeq H^{N+1}(k, J_q)$ et Im $d_2^{N-1,2}=0$ par le lemme 2.2.

2.6. *Remarques.* (1) Pour la compatibilité des dualités entre $H^{i+1}(k_i, J_q)$ et $\hat{J}(k_i)_q$ d'une part, $H^i(k_{i-1}, J_q)$ et $\hat{J}(k_{i-1})_q$ d'autre part, dans le cas $i=1$, nous renvoyons à la démonstration du lemma 2.12 p. 243 de [1].

(2) L'application $j: H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q) \to H^{i+2}(X_i, \mu_q)$ du diagramme de la Figure 2 admet un inverse à gauche: l'application surjective $H^{i+2}(X_i, \mu_q) \to H^{i+1}(X_{i-1}, \mu_q)$ duale de l'injection $H^1(X_{i-1}, \mu_q) \hookrightarrow H^1(X_i, \mu_q)$. L'application $H^{N+2}(X, \mu_q) \to H^{N+1}(X_{N-1}, \mu_q)$ joue le rôle d'application "résidue" (cf. Kato [5, section 1.4, p. 619]). Par composition on obtient une application surjective $H^{N+2}(X, \mu_q) \to H^2(X_0, \mu_q)$ duale de l'injection $H^1(X_0, \mu_q) \hookrightarrow H^1(X, \mu_q)$.

2.7. *Conjecture.* Compte tenu de l'observation qui précéde le lemme 2.3, nous pouvons conjecturer que le résultat 2.1 est vrai $\forall N$ sans l'hypothèse (ii).

2.8. *Application au cas où k est un corps p-adique* ($N=1$). Dans ce cas, le théorème 9.2 de [13] ou le théorème principal de [8] nous dit que Pic(X) est dual du groupe Br(X). Il en résulte que le conoyau Pic(X)/$q \cdot$ Pic(X) de la multiplication par q dans Pic(X) est le dual du noyau Br$(X)_q$ de la multiplication par q dans Br(X). La suite exacte $0 \to \mathrm{Pic}(X)/q \cdot \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mu_q) \to \mathrm{Br}(X)_q \to 0$ montre alors l'auto-dualité du groupe $H^2(X, \mu_q)$. Comme par le théorème 2.1, les groupes $H^3(X, \mu_q)$ et $H^1(X, \mu_q)$ sont aussi en dualité parfaite, on en déduit:

PROPOSITION. *Soient k un corps p-adique (dont le corps résiduel contient* *les racines q-ièmes de l'unité), X une courbe projective non singulière, géométriquement connexe, définie sur k. Il existe alors un accouplement*

$$H^i(X, \mu_q) \times H^{4-i}(X, \mu_q) \longrightarrow H^4(X, \mu_q) \simeq \mu_q, \qquad 0 \leqslant i \leqslant 4,$$

qui met en dualité parfaite les deux groupes finis $H^i(X, \mu_q)$ et $H^{4-i}(X, \mu_q)$.

III. Un théorème du type Tate–Poitou

On garde les hypothèses et notations du théorème 2.1 de la section II et on désigne par K le corps des fonctions de la courbe X. Pour $i \geqslant 0$, on pose $Ш^i(?) = \operatorname{Ker}\{H^i(K, ?) \to \prod_{v \in X^0} H^i(K_v, ?)\}$ où ? est mis pour un $\mathrm{Gal}(K_s/K)$-module abélien fini et X^0 désigne l'ensemble des points fermés de X.

3.1. Théorème. *Sous les hypothèse du théorème 2.1, les groupes $Ш^{N+2}(\mu_q)$ et $Ш^1(Z/qZ)$ sont finis et il existe un accouplement $Ш^{N+2}(\mu_q) \times Ш^1(Z/qZ) \to Z/qZ$ qui les met en dualité parfaite.*

Nous verrons que l'accouplement du théorème 3.1 est induit par l'accouplement du théorème 2.1.

Pour $v \in X^0$, K_v est un corps local de dimension $N+1$ au sens de Parshin–Kato. Par la proposition 1.2 dans laquelle on remplacera N par $(N+1)$ ou par Kato [7, théorème 1, section 1], nous avons donc des isomorphismes $H^{N+2}(K_v, \mu_q) \simeq H^{N+1}(k(v), \mu_q) \simeq Z/qZ$ où $k(v)$ désigne le corps résiduel de K_v. La suite de localisation s'écrit

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow \bigoplus_{v \in X^0} H_v^{N+2}(X, \mu_q) \longrightarrow H^{N+2}(X, \mu_q) \longrightarrow H^{N+2}(K, \mu_q) \\
\qquad\qquad\quad \wr| \\
\qquad\quad \bigoplus_{v \in X^0} H^N(k(v), \mu_q) \\
\quad \longrightarrow \bigoplus_{v \in X^0} H_v^{N+3}(X, \mu_q) \longrightarrow H^{N+3}(X, \mu_q) \longrightarrow \cdots.
\end{array} \tag{5}$$

Or $H_v^{N+3}(X, \mu_q) \simeq H^{N+2}(K_v, \mu_q) \simeq H^{N+1}(k(v), \mu_q) \simeq Z/qZ$ (dans le cas $N=1$, ce sont les isomorphismes de Saito [12, p. 49]).

La suite exacte (5) prend alors la forme

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow \bigoplus_{v \in X^0} H^N(k(v), \mu_q) \xrightarrow{c_q} H^{N+2}(X, \mu_q) \longrightarrow H^{N+2}(K, \mu_q) \\
\quad \longrightarrow \bigoplus_{v \in X^0} H^{N+2}(K_v, \mu_q) \longrightarrow H^{N+3}(X, \mu_q) \\
\qquad\qquad\quad \wr| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wr| \\
\qquad\quad \bigoplus_{v \in X^0} (Z/qZ)_v \xrightarrow{\sigma} Z/qZ \longrightarrow 0.
\end{array} \tag{5'}$$

D'où la suite exacte

$$\cdots \bigoplus_{v \in X^0} H^N(k(v), \mu_q) \xrightarrow{c_q} H^{N+2}(X, \mu_q) \longrightarrow \text{Ш}^{N+2}(\mu_q) \longrightarrow 0 \qquad (5'')$$

(c_q représente la fonction de Gysin) faisant apparaître $\text{Ш}^{N+2}(\mu_q)$ comme un quotient du groupe fini $H^{N+2}(X, \mu_q)$. La suite duale $(\widehat{5''})$ de $(5'')$ s'écrit

$$\cdots \prod_{v \in X^0} k(v)^*/(k(v)^*)^q \longleftarrow H^1(X, \mu_q) \longleftarrow \widehat{\text{Ш}^{N+2}(\mu_q)} \longleftarrow 0 \qquad (\widehat{5''})$$

car d'une part, $k(v)$ étant un corps local de dimension N, on peut lui appliquer la proposition 1.2 et $H^N(k(v), \mu_q)$ est le dual de $H^1(k(v), \mu_q) \simeq k(v)^*/(k(v)^*)^q$, d'autre part, par le théorème 2.1, $H^1(X, \mu_q)$ est le dual de $H^{N+2}(X, \mu_q)$.

Le théorème 3.1 sera établi ainsi une fois prouvé

3.2. LEMME. *$\widehat{\text{Ш}^{N+2}(\mu_q)}$ est isomorphe à $\text{Ш}^1(\mu_q) \simeq \text{Ш}^1(Z/qZ)$.*

De la suite spectrale de Leray pour le morphisme spec $K \hookrightarrow X$, on tire la suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow H^1(X, \mu_q) & \longrightarrow & H^1(K, \mu_q) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in X^0} (Z/qZ)_v. \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \\ H^1(X, Z/qZ) & & H^1(K, Z/qZ) & & \end{array} \qquad (6)$$

Le noyau $\text{Ш}^1(\mu_q)$ de

$$\begin{array}{ccc} H^1(K, \mu_q) & \longrightarrow & \prod_{v \in X^0} H^1(K_v, \mu_q) \\ & & \wr\wr \\ & & \prod_{v \in X^0} (K_v^*/(K_v^*)^q) \\ & & \wr\wr \\ & & \prod_{v \in X^0} \{k(v)^*/(k(v)^*)^q \times (Z/qZ)_v\} \end{array}$$

est donc isomorphe au noyau de $H^1(X, \mu_q) \to \prod_{v \in X^0} k(v)^*/(k(v)^*)^q$, c'est-à-dire à $\widehat{\text{Ш}^{N+2}(\mu_q)}$ par l'exactitude de $(\widehat{5''})$.

3.3. COROLLAIRE. *Les suites exactes*

$$\bigoplus_{v \in X^0} H^{N+2}(K_v, \mu_q) \longleftarrow H^{N+2}(K, \mu_q) \longleftarrow \widehat{H^1(K, \mu_q)} \longleftarrow \bigoplus_{v \in X^0} \widehat{H^1(K_v, \mu_q)} \qquad (7)$$

et

$$\prod_{v \in X^0} H^0(K_v, \mu_q) \longrightarrow \widehat{H^{N+2}(K, \mu_q)} \longrightarrow H^1(K, \mu_q) \longrightarrow \prod_{v \in X^0} H^1(K_v, \mu_q) \qquad (\widehat{7})$$

sont duales l'une de l'autre.

(7) provient de la conjonction de la suite exacte $0 \to Ш^{N+2}(\mu_q) \to H^{N+2}(K, \mu_q) \to \oplus_{v \in X^0} H^{N+2}(K_v, \mu_q)$ qui définit $Ш^{N+2}(\mu_q)$ et de l'isomorphisme $Ш^{N+2}(\mu_q) \simeq \widehat{Ш^1(K, \mu_q)} = \mathrm{Coker}\{\oplus_{v \in X^0} \widehat{H^1(K_v, \mu_q)} \to \widehat{H^1(K, \mu_q)}\}$.

$(\widehat{7})$ est alors la suite duale de (7) compte tenu du fait que $H^{N+2}(K_v, \mu_q) \simeq Z/qZ$ et $H^0(K_v, \mu_q)$ sont duaux l'un de l'autre.

3.4. *Remarques.* (1) Dans le cas $N = 0$, i.e., $k = k$, $Ш^2(\mu_q) \simeq Ш^1(Z/qZ) \simeq Ш^1(\mu_q) = 0$; la suite exacte (5″) de la démonstration du théorème 3.1 se réduit à

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{v \in X^0} (Z/qZ)_v \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & H^2(X, \mu_q) \longrightarrow 0. & \\ & \wr\!\wr & (8) \\ & \pi_1^{ab}(X)/q \cdot \pi_1^{ab}(X) & \end{array}$$

L'épimorphisme dans (8) est induit par l'homomorphisme $\oplus_{v \in X^0} Z \to \pi_1^{ab}(X)$ de S. Lang défini par les substitutions de Frobenius et à image dense.

(2) Dans le cas $N = 0$, le corps de base k_0 n'étant plus fini mais seulement quasi-fini du type $C((t))$, C étant algébriquement clos de caractéristique 0, la dualité du théorème 3.1 est encore valable (cf. [2]).

(3) Si M est un $\mathrm{Gal}(K_s/K)$-module fini dont l'ordre est premier à p, on peut par dévissage se ramener au théorème 3.1 et en déduire qu'il existe une dualité parfaite entre $Ш^{N+2}(K, M)$ et $Ш^1(K, \hat{M})$ où $\hat{M} = \mathrm{Hom}(M, G_m)$.

(4) Les suites exactes (7) et $(\widehat{7})$ ne peuvent se rabouter que dans le cas de l'auto-dualité des $H^1(K_v, \mu_q)$; i.e., dans le cas $N = 0$ et on retrouve alors la suite exacte de Tate–Poitou [14, chap. II, 6.3].

3.5. *Applications au cas* $N = 1$. La suite exacte (5′) est essentiellement la suite exacte réduite modulo q du théorème 4-(1) de [7, p. 119] d'où $Ш^3(\mu_q) \simeq (Z/qZ)^r$ où r est le rang de X sur k introduit par S. Saito dans le chap. II de [12] (en particulier, si c_q dans (5″) est surjective, $r = 0$). On déduit alors du théorème 3.1.

3.5.1. COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *si* $N = 1$, $Ш^1(Z/qZ) \simeq (Z/qZ)^r$.

$$\begin{tikzcd}
K_2(K) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v \in X^0} k(v)^*/(k(v)^*)^q \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & SK_1(X)/qSK_1(X) \arrow[r] & 0 \\
H^2(K, \mu_q^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \bigoplus_{v \in X^0} H^1(k(v), \mu_q) \arrow[r, "c_q"] & H^3(X, \mu_q^{\otimes 2}) \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\
H^2(K, \mu_q) & & H^3(X, \mu_q) &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4

Nous allons maintenant donner une autre interprétation du sousgroupe $Ш^1(Z/qZ)$ de $H^1(X, \mu_q)$ (cf. lemme 3.2); dans la dualité entre $H^3(X, \mu_q)$ et $H^1(X, \mu_q)$, il correspond au quotient $Ш^3(\mu_q)$ de $H^3(X, \mu_q)$ (cf. (5″). Soit $\sigma: SK_1(X) \to \pi_1^{ab}(X)$ l'application de "réciprocité" de Bloch et Saito (cf. [12, chap. II, n° 1] ou [1]); dans la démonstration du lemme 5.3, chap. II de [12], Saito considère pour tout $q > 0$ la Figure 4 d'où il déduit l'existence d'une application

$$\sigma_q: SK_1(X)/qSK_1(X) \to \pi_1^{ab}(X)/q\pi_1^{ab}(X)$$

($\simeq H^3(X, \mu_q)$ par le théorème 2.1) induite par σ. Par la commutativité du carré de droite de la Figure 4, l'image de σ_q coïncide avec l'image de c_q; le conoyau de σ_q est donc isomorphe au conoyau de c_q donc à $Ш^3(\mu_q)$. σ induit (section II de [12] ou le diagramme de l'introduction de [12]) une application $\tau: V(X) \to T_G$ où $V(X) = \operatorname{Ker}\{SK_1(X) \to^{\text{Norm}} k^*\}$ et T_G désigne le groupe des éléments coinvariants du groupe de Tate de la Jacobienne J de X par l'action du groupe de Galois $G = \operatorname{Gal}(k^s/k)$. Equivalement, puisque X admet un point k-rationnel, T_G peut être défini par l'égalité $\pi_1^{ab}(X) \simeq T_G \times G^{ab}$. Soit τ_q l'application $V(X)/qV(X) \to T_G/qT_G$ induite par τ; par la théorie du corps de classes local appliqué à k, les conoyaux des applications σ_q, τ_q, donc aussi c_q sont isomorphes. Si la caractéristique de k est supposée nulle (i.e. si k est un corps p-adique), le corollaire 4.3 du chap. II de [12] nous dit que l'image de τ est finie et son conoyau isomorphe à la partie libre $L \simeq Z^r$ de T_G. Or, L est aussi isomorphe à la partie libre du groupe de Tate $T(\hat{J}(k))$ de $\hat{J}(k)$. Par construction même de ce groupe, si q est premier, r représente le nombre d'éléments qui apparaissent comme q-ièmes composantes dans la limite projective $T^q(\hat{J}(k))$ donc aussi le nombre d'éléments de $\hat{J}(k)_q$ qui sont divisibles dans $\hat{J}(k)$ (i.e., sont dans $m\hat{J}(k)$ pour tout m). On en déduit:

3.5.2. PROPOSITION. *Outre les hypothèses du théorème* 2.1, *supposons k de caractéristique nulle* (*i.e., k p-adique*) *et l'entier q premier. Désignons par* $\operatorname{div}(\hat{J}(k)_q)$ *le sous-groupe de $\hat{J}(k)_q$ constitué des éléments qui sont divisibles dans $\hat{J}(k)$. En particulier,* $\# \operatorname{div}(\hat{J}(k)_q) = r$. *A l'aide du point k-rationnel de*

X, identifions $H^1(X,\mu_q)$ avec $k^*/(k^*)^q \times \hat{J}(k)_q$. Alors dans la dualité du théorème 2.1 *entre $H^3(X,\mu_q)$ et $H^1(X,\mu_q)$, le quotient* $Ш^3(\mu_q)$ *de $H^3(X,\mu_q)$ correspond au sous-groupe* $\mathrm{div}(\hat{J}(k)_q)$ *de* $\hat{J}(k)_q$.

3.5.3. COROLLAIRE. $Ш^1(Z/qZ) \simeq \mathrm{div}(\hat{J}(k)_q)$ *pour q premier.*

IV. UNE SUITE EXACTE LONGUE DU TYPE DE TATE CAS $N=1$)

Pour $N=1$, la suite exacte (5′) de localisation se prolonge sur la gauche en la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(X)_q \longrightarrow \mathrm{Br}(K)_q \longrightarrow \bigoplus_{v \in X^0} k(v)^*)^q \longrightarrow H^3(X,\mu_q)$$
$$\longrightarrow H^3(K,\mu_q) \longrightarrow \bigoplus_{v \in X^0} H^3(K_v,\mu_q) \longrightarrow \mu_q \longrightarrow 0. \tag{9}$$

Compte tenu des résultats des sections 2 (corollaire 2.12) et 9 de [13] (cf. aussi le n° 2.8 précédent), la suite exacte duale de (9) s'écrit

$$0 \longrightarrow Z/qZ \longrightarrow \prod_{v \in X^0} H^0(K_v,\mu_q) \longrightarrow \widehat{H^3(K,\mu_q)} \longrightarrow H^1(X,\mu_q)$$
$$\longrightarrow \prod_{v \in X^0} k(v)^*/(k(v)^*)^q \longrightarrow C_K/qC_K \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)/q\,\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0. \tag{$\widehat{9}$}$$

(Remarquons que si U_v désigne le groupe des unités de K_v, $U_v/U_v^q \simeq k(v)^*/(k(v)^{*q})$. La flèche $H^1(X,\mu_q) \to \prod_{v \in X^0} k(v)^*/(k(v)^*)^q$ dans $(\widehat{9})$ est aussi la flèche de gauche de la suite exacte $\widehat{(5)''}$. $C_K=$ groupes des classes d'idèles de K).

De manière analogue, si S est un ensemble fini de places de X, $U=X-S$, G_S le groupe fondamental de U, nous avons la suite exacte de localisation $(9)_S$ et sa duale $\widehat{(9)_S}$

$$\ldots \bigoplus_{v \in S} k(v)^*/(k(v)^*)^q \longrightarrow H^3(X,\mu_q) \longrightarrow H^3(G_S,\mu_q)$$
$$\longrightarrow \prod_{v \in S} H^3(K_v,\mu_q) \longrightarrow \mu_q \longrightarrow 0, \tag{$(9)_S$}$$

$$0 \longrightarrow Z/qZ \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} H^0(K_v,\mu_q) \longrightarrow \widehat{H^3(G_S,\mu_q)} \longrightarrow H^1(X,\mu_q)$$
$$\longrightarrow \prod_{v \in S} k(v)^*/(k(v)^*)^q \longrightarrow \ldots. \tag{$\widehat{(9)_S}$}$$

Puisque S est fini, $\prod_{v \in S} k(v)^*/(k(v)^*)^q$ et $\bigoplus_{v \in S} k(v)^*/(k(v)^*)^q$ sont isomorphes et auto-duaux dans la dualité de Tate des corps locaux de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z/qZ \arrow[r] & \bigoplus_{v \in S} H^0(K_v, \mu_q) \arrow[r] & \widehat{H^3(G_S, \mu_q)} \arrow[r] & H^1(X, \mu_q) \arrow[d] \\
 & & & & \bigoplus_{v \in S} k(v)^*/(k(v)^*)^q \arrow[d] \\
0 & \mu_q \arrow[l] & \prod_{v \in S} H^3(K_v, \mu_q) \arrow[l] & H^3(G_S, \mu_q) \arrow[l] & H^3(X, \mu_q) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

FIGURE 5

dimension 1. A la manière de Tate, nous pouvons rabouter $\widehat{(9)_S}$ et $(9)_S$ de façon à obtenir:

4.1. THÉORÈME. *La suite longue de la Figure 5 est exacte. De plus, dans le diagramme de la Figure 5 la ligne inférieure est la duale parfaite de la ligne supérieure, le terme médian* $\bigoplus_{v \in S} k(v)^*/(k(v)^*)^q$ *étant auto-dual.*

BIBLIOGRAPHIE

1. S. BLOCH, K-theory and classfield theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* **114** (1981), 229–266.
2. J. C. DOUAI, Le théorème de Tate–Poitou pour les corps de fonctions des courbes, *Comm. Algebra* **15** (11), 2379–2390 (1987).
3. R. GODEMENT, "Topologie algébrique et théorie des faisceaux," Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, XIII, Hermann, Paris, 1964.
4. K. KATO, A generalisation of local class field theory by using K-groups, I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **26** (1978), 303–376.
5. K. KATO, A generalisation of local class field theory by using K-groups, II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), 603–683.
6. K. KATO, "Galois Cohomology of Complete Discrete Valuations Fields," pp. 215–238, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 967, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1982.
7. K. KATO, "Class Field Theory and Algebraic K-Theory," pp. 109–126, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1016, Springer Verlag, Berlin/New York, 1983.
8. S. LICHTENBAUM, Duality theorems for curves over p-adic fields, *Invent. Math.* **7** (1969), 120–136.
9. J. S. MILNE, "Etale Cohomology," Princeton Mathematical Series, No. 33, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
10. A. P. OGG, Cohomology of abelian varieties over function fields, *Ann. of Math.* **76** (1962), 185–212.
11. A. N. PARSHIN, Abelian coverings of arithmetic schemes, *Soviet Math. Dokl.* **19** (1978), 1438–1442.
12. S. SAITO, Class field theory for curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44–80.
13. S. SAITO, Arithmetic on two dimensional local rings, *Invent. Math.* **85** (1986), 379–414.
14. J. P. SERRE, "Cohomologie galisienne," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1965.